page 438 1/4 -1992
E.S.I.G.E.L.E.C Math 2

CONCOURS 92

EPREUVE MATH. 2

(Durée 3 heures)

Il va de soi que la clarté et la qualité, tant de la présentation que des justifications influencent fortement le correcteur.

PROBLEME 1

I - On note : soit $M_4(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices (4,4) à coefficients réels.

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

1°) Justifier sans calcul que cette matrice est diagonalisable dans $M_4(\mathbb{R})$

2°) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres.

3°) Déterminer une base de vecteurs propres, préciser une matrice diagonale D semblable à A.

4°) Calculer A^2. En déduire que A est un diviseur de zéro, puis en déduire A^n.

5°) Soit $M = \{\alpha A + \beta I / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$

Montrer que M est une sous Algèbre de $M_4(\mathbb{R})$

Préciser les éléments inversibles de M.

II. Soit $\mathbb{R}_3[x]$ le R-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de variable x et de degré inférieur ou égal à 3, on le munit de sa base canonique :

$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$$

soit f la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}_3[x]$ par

. $f(P, Q) = P(-1)\,Q(-1) + P(1)Q(1)$

1°) Déterminer sa matrice relativement à la base $\mathcal{C}$

2°) Préciser ses propriétés :

Est-elle symétrique ? définie ? positive ? dégénérée?

Déterminer son noyau.

3°) Préciser une base de $\mathbb{R}_3[x]$ orthogonale relativement à f.

Donner la matrice de f dans cette base.

4°) Soit $F = \{(x^2+1)\,(ax+b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

$G = \{(x^2-1)\,(ax+b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

Deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[x]$

Montrer que $\mathbb{R}_3[x] = F \oplus G$

Déterminer les orthogonaux relativement à f de F et G.

5°) On considère g la restriction de f à F

Montrer que c'est un produit scalaire.

Déterminer une base orthonormale relativement à g de F.

page 440 3/4 - 1992.
E.S.I.G.E.L.E.C Math 2

PROBLEME N° 2

Notations :

E = M_2 (ℝ) l'algèbre des matrices (2,2) à coefficients réels.

I : La matrice unité de E.

H = Le sous espace vectoriel de E des matrices d'homothéties.

T = Le sous espace vectoriel de E des matrices de trace nulle.

Tr (A) = la trace de A

det (A) = le déterminant de A

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La base canonique de M_2 (ℝ)

1) Soit : $q : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longrightarrow & \det(A) \end{array}$

Montrer que q est une forme quadratique. Est-elle dégénérée ?

Qu'en est-il de sa restriction à T ?

Dans la suite M_2 (ℝ) est muni de cette forme quadratique (on notera f la forme bilinéaire symétrique associée).

2) Soit : $\sigma : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ A & \longrightarrow & [\mathrm{Tr}(A)]\, I - A \end{array}$

Déterminer $\sigma(A)$ puis $A.\sigma(A)$

Déterminer les valeurs propres, puis les sous espaces propres de $\mathcal{D}(A)$

En déduire sa nature géométrique.

3°)Calculer $A\,\mathcal{O}(B)$ $\quad B \in \Pi_2, B \neq A$

Exprimer la forme bilinéaire symétrique f associée à q en fonction de Tr et $\mathcal{O}$

4°) Montrer que $\mathcal{O}$ appartient au groupe orthogonal de q.

5°) Ecrire le polynôme caractéristique de A en fonction de Tr(A) et det (A).

En déduire un polynôme p(x) tel que p(A) = 0

6°) Déterminer la trace et le déterminant des solutions de $A^2 = \varepsilon I$ où $\varepsilon \in \{-1,+1\}$

7°) Montrer que $E = H \oplus T$ et que $H \perp T$

8°) Soient :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Une base de E

Déterminer la matrice de q dans cette base, que peut-on dire de cette base ?